

Quante sono le dimensioni dell'universo in cui viviamo?

Dal modello standard delle particelle elementari ad un universo a molte dimensioni

I. Introduzione

Per capire perché i fisici teorici sono arrivati all'idea che il nostro universo abbia più dimensioni di quelle che osserviamo tutti i giorni, occorre risalire alle ipotesi sulla struttura della materia. Tralascieremo le teorie basate sui quattro elementi, terra, aria fuoco e acqua, e passeremo direttamente alla prima ipotesi di una materia fatta di corpuscoli formulata da Democrito verso il 400 a.C. Questa idea si è evoluta attraverso i secoli fino ad una affermazione completa che avvenne solo all'inizio del Novecento. Quasi contemporaneamente nacquero le idee teoriche che dovevano permettere una interpretazione consistente dei fenomeni microscopici. Il primo segnale della nuova fisica, la fisica dei quanti, si ebbe nel Novecento con la formulazione della ipotesi dei quanti da parte di Planck.

La formulazione completa di questa teoria, che avrebbe fornito il linguaggio necessario per descrivere gli atomi, richiese ancora alcuni anni. La chiave di questa descrizione è la dualità onda-corpuscolo. Secondo questa idea la materia ha un duplice aspetto: la si può descrivere in termini corpuscolari ma anche in termini ondulatori a seconda dei fenomeni che si stanno studiando. La stessa cosa è vera per quelli che fino ad allora erano stati considerati fenomeni puramente ondulatori, quali la luce. Ebbene, anche la luce ha una duplice descrizione e in certe situazioni di osservazione la descrizione corretta è in termini puramente corpuscolari. L'idea del fotone, formulata da Einstein nel 1905, costituisce la base corpuscolare per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici.

Il passaggio dagli atomi ai loro costituenti, i nuclei, ed ai costituenti dei nuclei, protoni e neutroni, fino a quelli che oggi sono ritenuti i costituenti ultimi della materia, i quark, richiese un ulteriore passaggio: l'unificazione della teoria quantistica con la teoria della relatività formulata da Einstein nel 1905. La teoria risultante ha preso il nome di

teoria quantistica dei campi e racchiude in modo estremamente elegante il duplice aspetto ondulatorio e corpuscolare della natura. Sulla base di questo linguaggio si è sviluppata la descrizione delle particelle elementari e delle loro interazioni. Questo processo ha portato a metà degli anni '60 a formulare quello che è chiamato il modello standard delle particelle elementari. Questo modello ha avuto le prime verifiche sperimentali all'inizio degli anni '70 ed è stato confermato in modo definitivo negli anni '90 con esperienze fondamentali fatte al CERN (Centre Europeenne pour la Recherche Nucleaire) di Ginevra e a SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) in California.

Si potrebbe pensare che dopo la formulazione di questo modello non ci sia più niente da fare. Invece si ha una situazione alquanto paradossale perchè da un lato il modello standard è stato confermato dagli esperimenti con una precisione spettacolare, mentre d'altro lato noi sappiamo che la descrizione della natura data da questo modello ad energie più elevate di quelle fin qui esplorate è sicuramente errata. Cercheremo di dare un'idea della difficoltà principale cui va incontro questo modello e di far capire che una soluzione a questo problema potrebbe essere in un universo che ha un numero di dimensioni superiore a quelle che osserviamo, cioè tre dimensioni spaziali ed una dimensione temporale. Infatti la difficoltà del modello standard è che in esso non c'è spazio per una descrizione della gravità in modo consistente con la teoria quantistica e l'idea di avere delle ulteriori dimensioni spaziali origina dalla ricerca di una teoria che possa permettere di riconciliare il modello standard con la gravità stessa.

2. Il modello standard delle particelle elementari

Le ricerche moderne sulla struttura della materia iniziano alla fine dell'Ottocento con la scoperta dell'elettrone. Successivamente fu stabilita la struttura dell'atomo come un nucleo centrale di carica positiva circondato da elettroni in numero tale da renderlo elettricamente neutro. A sua volta il nucleo risulta composto da protoni, particelle di carica positiva e massa pari a quasi 2000 volte quella degli elettroni, e da neutroni, particelle neutre con massa quasi uguale a quella dei protoni. La carica dei protoni è esattamente uguale ed opposta a quelle degli elettroni e quindi la neutralità dell'atomo è assicurata dall'aver ugual numero di elettroni e di protoni. A causa di questa relazione torna utile usare come unità di misura della carica elettrica la carica

del protone. Quindi il protone, in queste unità di misura, ha carica +1 e l'elettrone -1. Il neutrone ha invece carica 0.

Negli anni '70 è stato poi scoperto (sebbene già supposto precedentemente per via teorica) che il protone ed il neutrone sono essi stessi composti da nuove particelle, i quark. I quark hanno carica frazionaria e sia il protone che il neutrone sono costituiti da tre quark. I quark costituenti sono di due tipi: il tipo *up* (abbreviato *u*) e il tipo *down* (abbreviato *d*). Il quark *u* ha carica +2/3 mentre il *d* ha carica -1/3. Quindi il protone ha una struttura *uud*, mentre il neutrone *ddu*. Fin qui le particelle elementari sembrerebbero essere l'elettrone, il quark *u* ed il quark *d*. A queste andrebbe aggiunto il neutrino, la cui esistenza fu predetta da Pauli negli anni '30. Queste quattro particelle, che indicheremo con *v*, per neutrino, *e* per elettrone ed *u* e *d*, costituiscono quella che viene chiamata la prima famiglia delle particelle elementari, dato che nel corso degli anni si sono trovate negli esperimenti altre due famiglie, costituite da particelle del tutto simili a quelle della prima famiglia ma di massa via via crescente.

Leptoni	Massa(Gev/c ²) [*]	Carica elettrica	Quark	Massa(Gev/c ²)	Carica elettrica
ν_e <i>e</i>	<10 ⁻⁸ 5x10 ⁻⁴	0 -1	<i>u</i> <i>d</i>	3x10 ⁻³ 6x10 ⁻³	+2/3 -1/3
ν_μ <i>μ</i>	<2x10 ⁻⁴ 0.1	0 -1	<i>c</i> <i>s</i>	1.3 0.1	+2/3 -1/3
ν_τ <i>τ</i>	<0.02 1.8	0 -1	<i>t</i> <i>b</i>	175 4.3	+2/3 -1/3

Tavola 1

Le tre famiglie corrispondono alle righe orizzontali della tabella. Nella prima riga a sinistra ci sono l'elettrone, il suo neutrino ed i quark *u* e *d*. Analogamente per le altre due famiglie. Le particelle corrispondenti all'elettrone si chiamano muone (*μ*) e tau (*τ*). Le particelle corrispondenti ai quark *u* e *d* sono i quark charm (*c*), strano (*s*) e top (*t*), bottom (*b* rispettivamente). Le particelle alla sinistra della riga grossa centrale si chiamano leptoni (perchè sono in genere più leggere di quelle sulla destra), mentre quelle sulla destra si chiamano genericamente quark.

Le particelle elementari fin qui scoperte sono illustrate in Tavola 1. In particolare la divisione della tavola separa le particelle in due gruppi, a sinistra i leptoni ed a destra i quark.

* Le energie in particelle elementari si misurano facendo uso degli elettronvolt (eV), cioè l'energia che un elettrone acquista passando attraverso una differenza di potenziale di 1 Volt. Dalla relazione di Einstein $E=mc^2$ segue che le masse hanno dimensioni di una energia divisa per il quadrato di una velocità e quindi si misurano in eV/c². 1 MeV corrisponde ad un milione di eV.

3. Le interazioni fondamentali

Le forze conosciute in natura sono di quattro tipi: (1) l'interazione gravitazionale, responsabile del moto dei pianeti e la cui manifestazione più nota è nel fatto che tutti i corpi cadono; (2) ci sono poi le interazioni elettromagnetiche, cioè quelle che danno luogo alle forze elettriche e magnetiche, e (3) le interazioni forti che sono responsabili del legame nucleare. Infatti, se non ci fosse una forza ulteriore, i protoni del nucleo si respingerebbero, dato che le interazioni elettriche sono enormemente più grandi di quelle gravitazionali (vedi dopo), e non si avrebbe dunque la stabilità nucleare. Quindi deve esistere un'altra forza, o interazione, detta interazione forte (perché deve essere più grande di quella elettromagnetica). Esistono infine (4) le interazioni deboli, che sono le responsabili dei decadimenti radioattivi.

È interessante conoscere in quale rapporto stanno tra loro le varie forze. A questo scopo si può calcolare quanto valgono se le riferiamo a due protoni. Se facciamo uguale ad uno la corrispondente forza elettromagnetica si ha:

$$\text{Forza elettromagnetica} = 1$$

$$\text{Forza forte} = 20$$

$$\text{Forza debole} = 10^{-7}$$

$$\text{Forza gravitazionale} = 10^{-36}$$

Come si vede, la forza gravitazionale è enormemente più piccola di tutte le altre. Questo punto va sottolineato perché è la fonte di tutti i guai del modello standard ed è il motivo per cui esploreremo la possibilità che l'universo abbia un numero di dimensioni spaziali superiore a tre.

Ci possiamo ovviamente chiedere per quale motivo l'interazione gravitazionale è così piccola. Ricordiamo che la forza di gravitazione è proporzionale al prodotto delle due masse che si attraggono. Quindi se vogliamo avere una forza gravitazionale comparabile con la forza elettromagnetica dovremo considerare delle masse dell'ordine di 10^{18} – 10^{19} volte più grandi della massa del protone. In altri termini: la forza gravitazionale è così piccola perché la forza gravitazionale dipende da una costante di proporzionalità, la costante gravitazionale di Newton G_N che è estremamente piccola. In termini di questa costante è possibile definire una massa tipica associata alla gravitazione, la massa di Planck, data da

$$M_p = \sqrt{\frac{hc}{G_N}} \approx 10^{19} m_p \quad (1)$$

dove h è la costante di Planck, cioè la costante fondamentale della meccanica quantistica, c è la velocità della luce e m_p la massa del protone. Come si vede, questa costante universale con le dimensioni di una massa ha circa la grandezza che avevamo trovato con il ragionamento precedente. Notiamo che mentre le masse delle particelle elementari variano da frazioni a un centinaio di volte m_p , la massa di Planck è enormemente più grande. Torneremo su questa differenza nel seguito per mostrare quali problemi crea.

Nella descrizione classica le interazioni sono trattate in termini ondulatori. Pensiamo al lancio di un sasso in uno stagno. Il sasso, entrando nell'acqua, genera delle onde che si propagano nello stagno. Analogamente per il campo elettromagnetico, una carica oscillante produce un campo elettrico (con associato un campo magnetico) che si propaga nello spazio. L'interazione tra due cariche si genera perchè ognuna delle due cariche emette un campo elettromagnetico che arrivando sull'altra carica genera una forza. Ovviamente le due forze sono uguali ed opposte.

Lo stesso meccanismo si applica a tutte le altre interazioni. La descrizione quantistica è alquanto diversa perchè dipende dal tipo di osservazione che viene effettuata. Per esempio, quando un'onda viene assorbita da un sistema atomico non si comporta affatto come un'onda, come invece succede durante la sua propagazione. Quando viene assorbita si comporta come una particella, viene cioè assorbita tutta insieme invece che un poco alla volta. Si dice che ad ogni onda è associato un quanto (o particella). I quanti associati alle interazioni elettromagnetiche sono i *fotoni*, mentre quelli associati alle interazioni gravitazionali vengono detti *gravitoni*. Quelli associati alle interazioni forti *gluoni*¹ ed infine i quanti delle interazioni deboli sono le particelle W (di cariche elettriche +1 e -1) e la particella Z di carica nulla. Queste ultime particelle furono scoperte al CERN dal gruppo di Rubbia a metà

¹ *Gluoni* ha origine dalla parola inglese *glue* che significa *colla*. Cioè, i gluoni "incollano" assieme i quark all'interno del nucleo.

degli anni '80.

Le stranezze della meccanica quantistica non finiscono qui perchè, in modo perfettamente simmetrico, ad ogni particella materiale, come i quark, viene associato un campo. Avremo dunque un campo associato all'elettrone, un altro campo associato al quark u , eccetera. Quindi la meccanica quantistica non fa una reale distinzione tra materia ed interazioni, almeno dal punto di vista della loro descrizione. Questi elementi, le particelle elementari di Tavola 1 e le tre interazioni, forte, elettromagnetica e debole sono i pilastri su cui si basa il così detto modello standard. Come vediamo l'interazione gravitazionale rimane fuori da questa descrizione.

Rispetto alle tre interazioni descritte dal modello standard, deboli, forti ed elettromagnetiche, i leptoni sono soggetti solo alle interazioni deboli ed elettromagnetiche. In particolare i neutrini, essendo neutri, risentono solo delle interazioni deboli. Dunque i leptoni non sono soggetti alle interazioni forti. Viceversa i quark subiscono tutti e tre i tipi di interazioni.

Come già osservato, il modello standard è stato verificato sperimentalmente con ottima precisione sia al CERN di Ginevra con l'acceleratore elettrone-positrone² chiamato LEP, che all'acceleratore di Stanford in California e fino ad ora non ci sono evidenze sperimentale per la sua non validità. Però ci sono dei seri dubbi teorici sul fatto che il modello standard possa rimanere valido allorchè lo si vada a verificare ad energie più grandi di quelle finora usate (circa 220 GeV³ al CERN). Vediamo di capire perchè i teorici hanno un tale dubbio nonostante le evidenze sperimentali. Così come lo abbiamo presentato sino a questo momento il modello standard non è completo; manca un elemento fondamentale, la così detta particella di Higgs.

La formulazione precedente del modello standard con le particelle elementari divise in quark e leptoni e le tre forze è consistente da un punto di vista matematico solo se ci sono particolari relazioni tra le interazioni di una data forza con le varie particelle. Come si dice, si devono avere delle particolari simmetrie, altrimenti la teoria non è matematicamente consistente. Si può però mostrare che, affinché queste

² I positroni sono le antiparticelle degli elettroni. Sono cioè identici agli elettroni salvo per la loro carica che è opposta, hanno cioè carica +1. Lo stesso è vero per tutte le particelle di Tavola 1; ad ogni particella è associata una antiparticella con le stesse proprietà, con l'eccezione della carica che è opposta.

³ GeV corrisponde ad un milione di MeV.

simmetrie siano operanti, tutte le particelle (quark, leptoni ed i quanti delle interazioni) devono essere rigorosamente a massa nulla⁴. D'altra parte, sperimentalmente tutti i quark ed i leptoni (inclusi i neutrini) hanno massa diversa da zero così, come i quanti delle interazioni deboli, W e Z.

Un certo numero di ricercatori, tra cui Higgs, hanno mostrato che è però possibile conservare queste simmetrie anche con masse non nulle, purchè si introduca una particella speciale. Questa particella è stata appunto chiamata particella di Higgs. Dato che lo scopo di questa particella è di fornire un meccanismo con cui dare massa a tutte le altre, nella teoria viene introdotta una scala di massa che ha un valore di circa 250 GeV. Le masse di tutte le altre particelle sono allora proporzionali a questa massa fondamentale.

4. I problemi del modello standard

Discutiamo adesso i motivi per cui il modello standard non può essere la teoria finale. Infatti, la gravità non è incorporata in esso ed inoltre i tentativi fin qui fatti per effettuare questa operazione portano a risultati non coerenti. Quindi il modello standard si può al più considerare come una teoria effettiva, sicuramente valida sino alle energie fin qui studiate (~200 GeV), ma ad energie più elevate potrebbero emergere fatti nuovi. Il modello standard dovrà essere modificato e, se niente altro succede, ci aspettiamo che questa modifica debba necessariamente avvenire prima di quelle energie (o masse) a cui la gravità diventa importante per le particelle elementari. Come abbiamo già visto questo valore corrisponde alla massa di Planck, $m_p \sim 10^{19} \text{ GeV}/c^2$.

Ciò non sarebbe necessariamente un problema se non fosse che in una teoria effettiva di questo tipo, ed in mancanza di situazioni particolari, le masse delle particelle devono essere tutte dell'ordine della massa sino alla quale la teoria è corretta. Per quark e leptoni questa situazione particolare esiste: infatti, la simmetria che rende il modello consistente permette di controllare le masse e di prenderle piccole a piacere. Ciò

⁴ In teoria della relatività le dizioni "una particella ha massa nulla" o "la particella si muove a velocità pari a quella della luce" sono equivalenti.

però non vale per la massa della particella di Higgs, che dovrebbe quindi essere dell'ordine di m_p .

Il punto è che la teoria dipende dal valore di questa massa e gli esperimenti fatti al CERN e a Stanford mostrano che, se il modello standard deve valere, allora la massa della particella di Higgs deve essere dell'ordine della scala corrispondente (~250 GeV). Quindi cadiamo in una palese contraddizione. Come se ne può uscire? In pratica ci sono solo due soluzioni che si conoscano:

- Esistenza di nuove interazioni che diventino effettive alla scala naturale del modello standard, diciamo dell'ordine del TeV⁵. In questo modo il modello standard sarebbe una teoria effettiva sino alla scala del TeV e la massa naturale della particella di Higgs sarebbe di quest'ordine di grandezza e quindi in accordo con il modello.
- La gravità è più forte di quanto si congetturi. Questo significa, per quanto abbiamo visto prima, che la scala di massa associata è più piccola della massa di Planck, però noi percepiamo solo una frazione della forza gravitazionale.

La prima ipotesi non sembra incoraggiata dagli attuali dati sperimentali, però occorre tener presente che nel 2008 entrerà in funzione il nuovo acceleratore del CERN di Ginevra, LHC (Large Hadron Collider) che permetterà di esplorare energie dell'ordine di qualche TeV. Quindi a LHC si dovrebbe verificare l'ipotesi di Higgs o trovare della nuova fisica. La seconda ipotesi che abbiamo formulato suona un po' strana, però come vedremo è proprio ciò che accade in teorie in un numero di dimensioni spaziali maggiori di tre.

5. La teoria di Kaluza -Klein

L'idea di considerare in fisica un numero di dimensioni spaziali superiore a tre non è nuova. Infatti, già negli anni 20 Kaluza e Klein studiarono questa possibilità nell'intento di unificare la gravitazione universale con l'elettromagnetismo. Ciò che fecero Kaluza e Klein fu di considerare l'universo come costituito da 4 dimensioni spaziali ed

⁵ Un TeV corrisponde a mille GeV.

una temporale (complessivamente 4+1) ed i campi elettromagnetico e gravitazionale come componenti di un campo gravitazionale nello spazio totale 4+1-dimensionale. Questo funziona pur di risolvere il problema della inosservabilità della quinta dimensione (o quarta spaziale). Questi autori supposero che l'ulteriore dimensione non fosse osservabile perchè compattificata ad un cerchio di raggio piccolissimo corrispondente alla lunghezza di Planck definita da

$$L_p = \sqrt{\frac{hG_N}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m.} \quad (2)$$

Notiamo che questa lunghezza è definita in termini della costante gravitazionale di Newton, così come lo era la massa di Planck. Come abbiamo detto la massa di Planck è grande perchè G_N è piccola. Per lo stesso motivo L_p è piccola. È chiaro che aumentando G_N , m_p diminuisce e L_p aumenta. Come si vede, L_p è piccolissima e per questo motivo la quarta dimensione spaziale non è osservabile così come esemplificato in figura 1.

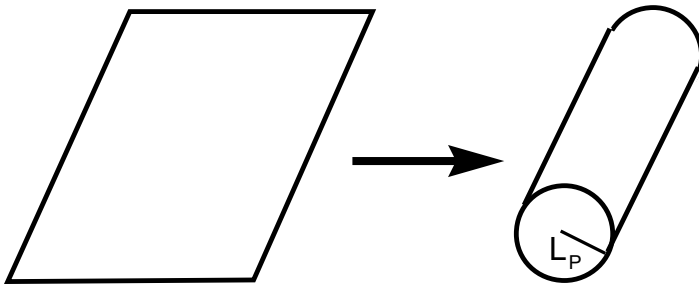


Figura 1 - La figura esemplifica come si esegue la compattificazione di una dimensione. Nel piano a sinistra, la dimensione orizzontale viene trasformata in un cerchio di raggio L_p . Ciò che risulta è un cilindro.

Chiaramente, per un osservatore di dimensioni molto grandi rispetto a L_p , il cilindro compattificato appare come un filo unidimensionale, mentre se l'osservatore ha dimensioni dello stesso ordine di L_p il cilindro appare come tale, cioè come un oggetto bidimensionale.

È possibile pensare a degli esperimenti che possano mettere in luce questa dimensione ulteriore? Come abbiamo detto il campo gravitazionale esiste in tutte le dimensioni spaziali, inclusa quella compattificata. Ma in questa dimensione le onde gravitazionali si devono, per così dire, avvolgere su se stesse e quindi si ha una

condizione sulle possibili lunghezze d'onda. Lungo il cerchio di raggio L_p possono stare solo un numero intero di lunghezze d'onda:

$$2\pi L_p = n\lambda \quad (3)$$

dove λ è la lunghezza d'onda ed n è un numero intero. Il problema è analogo a quelle delle vibrazioni di una corda di violino. Essendo la corda fissa agli estremi le possibili lunghezze delle onde (o le vibrazioni) emesse da un violino sono discrete ed un sottomultiplo della lunghezza della corda. La relazione fondamentale della meccanica quantistica che associa onde a particelle è

$$E = h\nu \quad (4)$$

dove E è l'energia della particella (o quanto) e ν la frequenza dell'onda. Ricordiamo anche che la relazione tra lunghezza d'onda e frequenza di un'onda che si propaghi alla velocità della luce, c , è data da

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (5)$$

Dunque, dalla quantizzazione della lunghezza d'onda (sottomultiplo della circonferenza del cilindro), segue la quantizzazione dell'energia

$$E = \frac{hc}{\lambda} = n \frac{hc}{2\pi L_p} \quad (6)$$

Dunque le possibili energie o masse dei quanti associati alle vibrazioni lungo la dimensione supplementare sono multipli interi di $hc/(2\pi L_p)$. È facile vedere che la massa associata a questa energia ($m=Ec^2$) è dell'ordine della massa di Planck.

Per 'vedere' queste particelle occorrerebbe avere degli acceleratori tali da produrre energie dell'ordine di 10^{19} GeV. Dato che arriveremo alla decina di TeV $\sim 10^4$ GeV ad LHC, l'impresa di rivelare particelle con massa di quindici ordini di grandezza più elevata si dimostra di fatto impossibile. Questo è il motivo per cui le teorie alla Kaluza-Klein, sebbene molto attraenti, sono state trascurate per molti anni vista l'impossibilità pratica di poterle verificare con degli esperimenti. Detto in maniera equivalente: ad LHC verranno esplorate dimensioni

spaziali dell'ordine di 10^{-18} - 10^{-19} metri, rispetto ai quali i 10^{-35} metri della lunghezza di Planck sono assolutamente trascurabili.

6 Un cenno alla teoria delle corde

Le teorie con più di tre dimensioni spaziali sono ritornate in auge negli ultimi anni grazie alle teorie di corda. La teoria delle corde assume che le particelle elementari non siano puntiformi come nel modello standard, ma bensì siano costituite da corde piccolissime, delle dimensioni di L_p . La teoria prevede poi che ci siano sia corde aperte che corde chiuse (vedi figura 2)



Figura 2 - Esempi di corde aperte e corde chiuse

Queste corde possono oscillare come corde di violino e, come nel ragionamento precedente, possono dar luogo a particelle con varie masse che dipendono dalla lunghezza della stringa. Nelle figure 3 e 4 sono rappresentati vari modi di oscillazione sia delle corde aperte che delle corde chiuse.

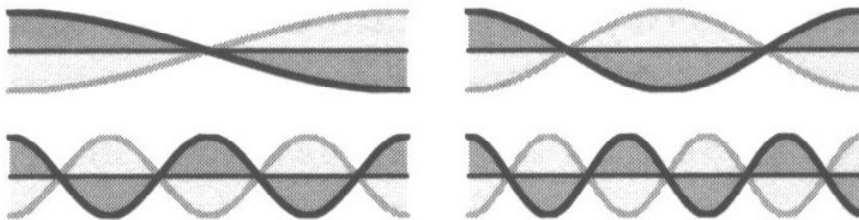


Figura 3 - Modi di oscillazione di una corda aperta



Figura 4 - Modi di oscillazione di una corda chiusa.

Nel loro stato di energia minima le corde aperte sono in grado di descrivere tutte le particelle del modello standard, inclusi i quanti delle loro interazioni. Lo stato di energia minima della stringa chiusa può invece descrivere il gravitone, cioè il quanto delle interazioni gravitazionali. Quest'ultimo è uno dei punti di maggior interesse di queste teorie, perchè per la prima volta si è accesa la speranza di poter descrivere le forze gravitazionali in un modo consistente con la meccanica quantistica. D'altra parte è un risultato fondamentale di queste teorie che la loro consistenza richiede che il numero di dimensioni spaziali del nostro universo sia uguale a 9. Pertanto il numero di dimensioni spazio-temporali, in accordo alla teoria di corda, dovrebbe essere pari a $10=9+1$. Un altro risultato abbastanza recente è che la dinamica delle corde richiede la presenza di altri oggetti dinamici nella teoria, le cosiddette *brane*⁶ (vedi figura 5).

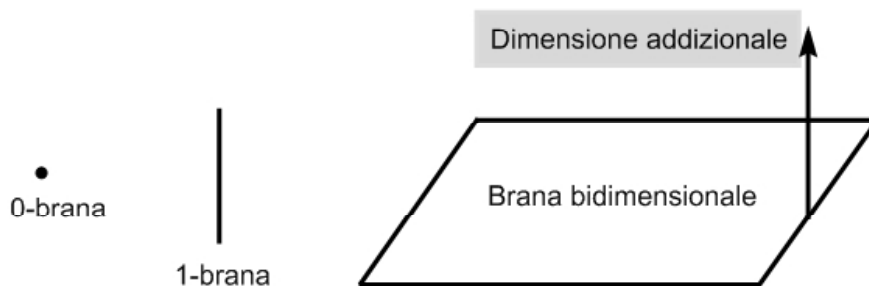


Figura 5 - Esempi di brane in uno spazio a tre dimensioni. Una 0-brana è un punto, una 1-brana è una linea ed una 2-brana un piano. Una corda è un caso particolare di 1-brana.

In queste teorie le corde aperte sono attaccate per le loro estremità ad

⁶ La parola brana è una deformazione dall'inglese *brane* che a sua volta è una contrazione di *membrane*. Quindi con "brana" si intende un oggetto geometrico che altro non è che un piano multidimensionale.

una brana, e sono vincolate a muoversi rimanendovi attaccate, mentre le corde chiuse si possono muovere in tutto lo spazio (vedi figura 6).

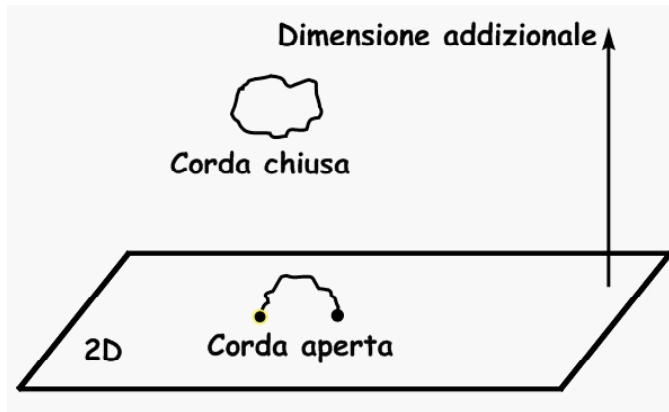


Figura 6 - La figura illustra il moto di una corda chiusa e di una corda aperta in tre dimensioni spaziali. La corda aperta è vincolata a muoversi sul piano bidimensionale, mentre la corda chiusa può muoversi in tutto lo spazio.

Pertanto le particelle ordinarie del modello standard, che sono gli stati di energia più bassa delle corde aperte, si muovono su una brana, mentre il gravitone, stato di energia minima della stringa chiusa, si muove in tutto lo spazio. È questa particolarità che le teorie recenti hanno estratto dalla teorie di corda, cioè che il nostro spazio-tempo (3+1 dimensionale) sia una 3-brana immersa in uno spazio con dimensioni spazio-temporali maggiori di quattro.

7. Il modello di Arkani-Hamed, Dvali e Dimopoulos

Le teorie recenti basate su dimensioni spazio-temporali maggiori di quattro [1] cercano di risolvere il problema del modello standard che abbiamo visto precedentemente, cioè l'enorme differenza tra la scala tipica del modello standard, dell'ordine del TeV, rispetto alla scala tipica della gravità, la scala di Planck dell'ordine di 10^{19} GeV. Questo problema è anche detto il "problema della gerarchia". I modelli con extra-dimensioni (come chiameremo da qui in avanti i modelli con dimensioni spazio-temporali maggiori di quattro) cercano di risolvere questo problema costruendo una teoria della gravità che abbia una scala di energie più piccola della scala di Planck. Come vedremo, in queste teorie la scala delle extra-dimensioni è dell'ordine del millimetro piuttosto che della lunghezza di Planck. Ciò nonostante, la teoria può

ancora essere compatibile con i fatti sperimentali conosciuti. Come abbiamo già detto, in queste teorie il nostro universo, pensato come costituito dalle particelle elementari di Tavola 1 e dai quanti delle loro interazioni forti, deboli ed elettromagnetiche, è confinato su una brana a 3 dimensioni spaziali, mentre la gravità esiste in tutto lo spazio che ha dimensioni maggiori di tre.

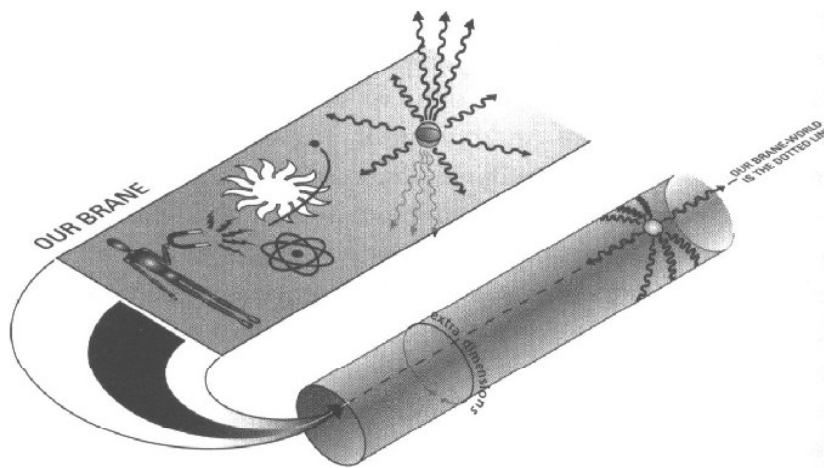


Figura 7 - Il cilindro vuol rappresentare un mondo con 4 dimensioni spaziali, la linea tratteggiata rappresenta il nostro universo tridimensionale e la quarta dimensione è compattificata ad un cerchio. In questa figura la linea tratteggiata è espansa in due dimensioni per mostrare come le interazioni del modello standard (e quindi noi stessi) siano confinate sulla brana. Mentre l'interazione gravitazionale si estende in tutte le direzioni.

È evidente che le interazioni elettromagnetiche, responsabili del nostro meccanismo della visione, essendo confinate sulla brana tridimensionale non ci permettono di osservare le dimensioni extra. Lo stesso discorso vale per le interazioni deboli e forti. Anche queste non ci permettono di fare esperimenti che possano confermare o meno l'esistenza di altre dimensioni.

L'unica forza su cui possiamo contare per "vedere" le dimensioni extra è la gravità. Quali sono i possibili esperimenti che possiamo fare con questa forza? Uno di questi è la verifica della legge di gravitazione universale di Newton su piccole distanze. Infatti la dipendenza della forza di gravitazione dalla distanza è legata al numero di dimensioni in cui tale forza agisce. In tre dimensioni questa forza varia con l'inverso del quadrato della distanza tra le masse che si attraggono. Possiamo però far vedere con un esempio che questo andamento dipende dal numero di dimensioni. A titolo esemplificativo consideriamo un getto

d'acqua come in figura 8.

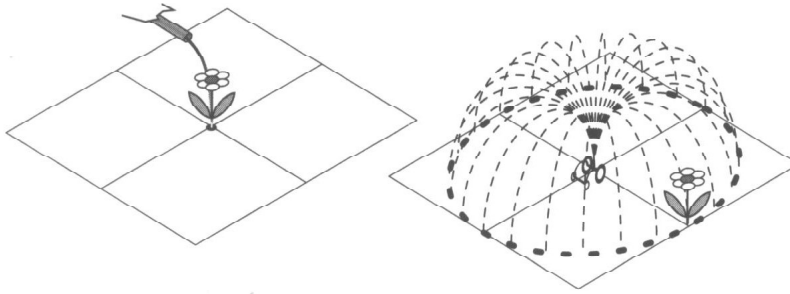


Figura 8 - A sinistra un getto d'acqua unidirezionale: tutta l'acqua finisce sul fiore. Se tramite uno spruzzatore l'acqua è diretta su un cerchio come nella figura di destra, sul fiore finisce solo una piccola frazione dell'acqua.

Prima di tutto osserviamo che la quantità di acqua che finisce sul fiore dipende dal numero di dimensioni lungo le quali viene spruzzata l'acqua. Se viene spruzzata in una dimensione finisce tutta sul fiore, se viene spruzzata in due dimensioni solo una piccola frazione finisce sul fiore. Quindi la quantità di acqua spruzzata che finisce sul fiore dipende dalle dimensioni e diminuisce man mano che le direzioni in cui viene spruzzata aumentano. Ancora meno acqua arriverebbe se il getto finisse sulla superficie di una sfera. Inoltre la quantità di acqua diminuisce come l'inverso della distanza se lo spruzzo è in due dimensioni.

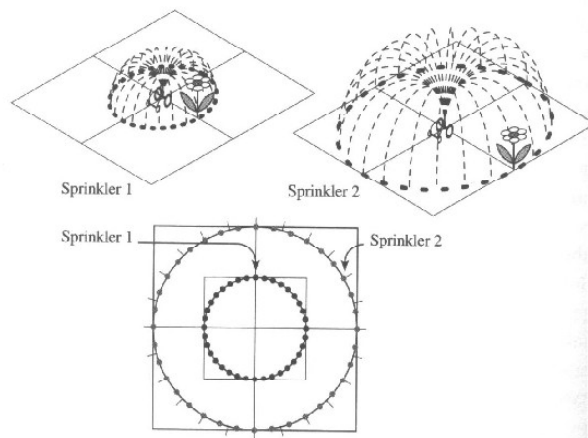


Figura 9 - La figura mostra il getto in situazioni corrispondenti a raggi diversi

Se la quantità di acqua totale è la stessa nei due casi illustrati in

figura 9, e se viene distribuita in maniera uniforme, la quantità di acqua che arriva sui cerchi per unità di lunghezza diminuisce all'aumentare della lunghezza della circonferenza. Dato che questa è proporzionale al raggio ne segue che la quantità d'acqua per unità di lunghezza diminuisce all'aumentare del raggio. Se il getto viene spruzzato su una superficie sferica, la quantità di acqua che arriva per unità di superficie diminuisce all'aumentare della superficie della sfera e quindi con l'inverso del raggio al quadrato.

Abbiamo esemplificato quello che avviene per uno spruzzo d'acqua, ma lo stesso avviene per la gravità. In due dimensioni la forza di gravità diminuisce con l'inverso della distanza, in tre dimensioni con l'inverso al quadrato e così, via. In d dimensioni spaziali la gravità diminuisce come $1/R^{d-1}$. In particolare se le dimensioni spaziali fossero 4 dovremmo osservare un andamento come $1/R^3$. Perché allora in condizioni ordinarie osserviamo un andamento del tipo $1/R^2$? Questo è illustrato nella figura 10.

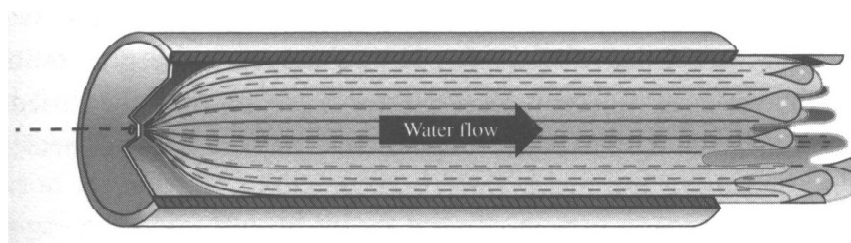


Figura 10 - L'acqua entra dal foro a sinistra e fluisce all'interno del tubo

Qui vediamo che l'acqua entrando dal foro a sinistra viene spruzzata in modo bidimensionale, ma allontanandosi dal foro l'acqua fluisce in una dimensione. Quindi a piccole distanze dalla sorgente (dell'ordine delle dimensioni del foro) il getto d'acqua vede effettivamente due dimensioni, ma a distanze più grandi il getto vede una sola dimensione (quella longitudinale). Ancora una volta questa analogia la si applica pari pari alla gravità. A distanze dalla sorgente della forza gravitazionale dell'ordine o più piccole della dimensione compattificata (supponiamo di essere in 4 dimensioni spaziali), la gravità varia come $1/R^3$, mentre a distanze maggiori varia come $1/R^2$.

Quindi, per verificare l'ipotesi di una dimensione compattificata occorre studiare la gravità a distanze sufficientemente piccole. D'altra parte abbiamo anche visto che solo una parte della gravità che vive nello spazio totale viene rivelata sulla brana, dunque potremmo supporre

che nello spazio totale la gravità sia così forte da corrispondere ad una massa di Planck di $1 \text{ TeV}/c^2$, mentre sulla brana sia talmente diluita da corrispondere effettivamente alla nostra massa di Planck, cioè $10^{19} \text{ GeV}/c^2$. È allora facile stabilire una corrispondenza tra il numero di dimensioni compatte e il valore del raggio R di compattezza. Il risultato di questa analisi è mostrato nella seguente tabella:

D	R
1	10^6 Km
2	0.1 mm.
3	10^{-6} mm.

Tavola 2 La tavola mostra i valori del raggio di compattezza a seconda del numero di dimensioni spaziali extra sotto la condizione che nello spazio totale la massa di Planck sia di $1 \text{ TeV}/c^2$, mentre sulla nostra brana valga $10^{19} \text{ GeV}/c^2$.

Mentre il caso di una dimensione extra è eliminato dai dati sperimentali, il caso di due dimensioni è consistente con quanto si osserva. Infatti gli esperimenti più precisi ci dicono che la gravità ha un andamento che dipende dall'inverso del quadrato della distanza fino a distanze dell'ordine di 0.2 mm . Quando saremo in grado di studiare distanze più piccole dovremmo trovare un andamento del tipo $1/R^4$. Quindi la forza di gravità diminuirebbe molto più rapidamente con la distanza.

Ci possiamo chiedere se esistano altri modi per rivelare possibili dimensioni extra. Consideriamo l'urto di due palle da biliardo come in figura 11:

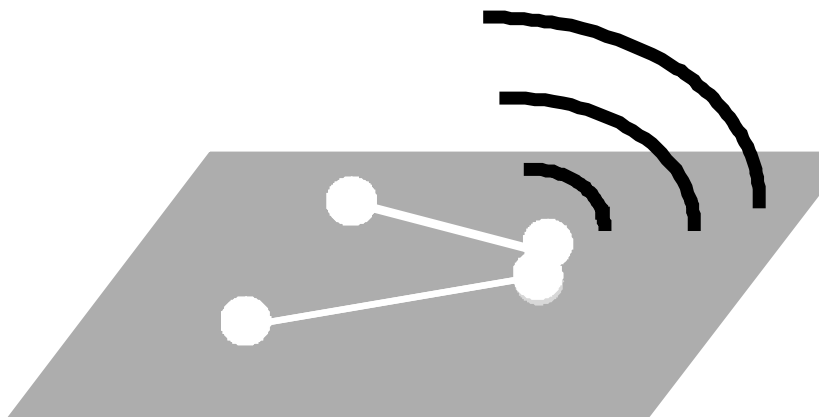


Figura 11 - La figura mostra le onde sonore emesse dallo scontro di due palle da biliardo.

Quando le due palle si scontrano, parte della loro energia di movimento viene trasformata in onde sonore generate dall'urto e che si propagano in tutto lo spazio. Un osservatore che viva sul biliardo sarà in grado di osservare solo le onde sonore emesse lungo il piano del biliardo. Se adesso si fa il calcolo dell'energia rimasta nelle palle dopo l'urto e ci si somma l'energia delle onde sonore emesse lungo il piano del biliardo si ha un'apparente violazione della conservazione dell'energia perchè non si tiene conto dell'energia trasportata dalle onde che si propagano lungo la terza direzione. Al prossimo acceleratore del CERN, LHC, potremo cercare di capire se nei processi di urto tra due protoni ci sono eventi con apparente violazione della conservazione dell'energia⁷. Questi processi, se osservati, potrebbero fornire indizi importanti sull'esistenza di ulteriori dimensioni.

Questo modello, formulato da Arkani-Hamed, Dvali e Dimopoulos, non risolve in modo completo il problema della gerarchia. Infatti le extra-dimensioni sono dell'ordine di $0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m.}$, mentre una scala di 1 TeV, trasformata in lunghezza corrisponde a circa 10^{-19} m. Quindi la differenza di scala è ancora molto grande, circa 15 ordini di grandezza. La virtù del modello è però quella di mostrare una possibile via di uscita al problema della gerarchia anche se in modo non completamente soddisfacente. Randall e Sundrum hanno fatto un'analisi critica di questo modello ed hanno visto che il suo difetto principale è quello di trascurare l'energia che la brana necessariamente possiede. Dato che la relatività generale ci insegna che la presenza di energia in un certo luogo equivale ad avere nei dintorni una curvatura dello spazio-tempo è necessario tener conto di questi effetti per la formulazione di un modello completo.

8. Il modello di Randall e Sundrum

La teoria della relatività generale di Einstein assegna un significato geometrico alla gravità, nel senso che identifica la gravità stessa come la geometria dello spazio-tempo, ed in particolare la curvatura in una determinata zona dello spazio è determinata dalla quantità di materia che si trova nei dintorni. Questo fa vedere che il modello considerato

⁷ Questi eventi si chiamano "eventi con energia mancante".

precedentemente non può essere corretto perchè lungo l'extra dimensione spaziale. nei dintorni della brana su cui noi viviamo, lo spazio non potrà essere piatto. Randall e Sundrum hanno calcolato questo effetto ed hanno modificato il modello precedente aggiungendo una seconda brana a quella su cui, per ipotesi, siamo confinati (vedi figura 12). Questa è detta la brana del modello standard (SM), mentre l'altra è chiamata brana di Planck.

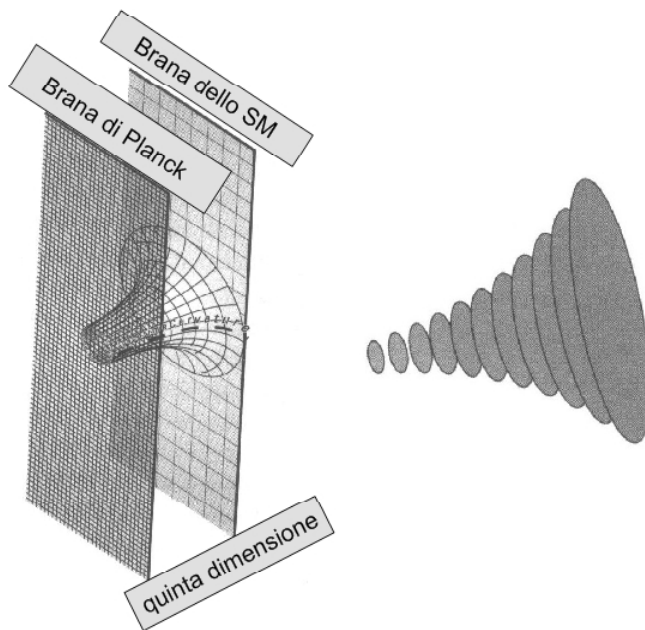


Figura 12 - A sinistra le due brane del modello di Randall e Sundrum. Nella parte destra la distorsione provocata dalla gravità generata dalle due brane lungo la quinta dimensione.

L'effetto della distorsione prodotta da queste due brane sulla quinta dimensione (quarta dimensione spaziale) è illustrato in figura 12. La geometria della quinta dimensione è paragonabile a un imbuto ed il suo effetto è quello di cambiare la scala delle lunghezze (o delle masse) lungo la quinta dimensione. È come se nell'esempio di figura 12 la scala delle lunghezze fosse determinata dal raggio della circonferenza che si ottiene tagliando l'imbuto perpendicolarmente al suo asse. Il raggio aumenta andando verso la bocca dell'imbuto. Dato il rapporto inverso tra masse e lunghezze, la scala di massa diminuisce muovendosi verso la nostra brana. In questo modello la gravità è determinata sulla brana di Planck dalla massa di Planck stessa, 10^{19} GeV. Questa è l'unica scala di tutta la teoria, ma muovendosi dalla brana di Planck alla nostra brana

questa scala di massa diminuisce e si può definire il modello in modo tale che la scala di massa naturale sulla nostra brana sia dell'ordine del TeV. Questo risolve il problema della gerarchia. Inoltre la riduzione delle masse si può ottenere assumendo che la distanza fisica nella quinta dimensione tra le due masse sia dell'ordine della lunghezza di Planck, rendendola praticamente inosservabile.

Esiste però una possibilità per vederne gli effetti. Abbiamo visto precedentemente che l'effetto di una dimensione compattificata è quello di produrre degli stati di energia (o massa) inversamente proporzionale al raggio di compattificazione. Nel caso in esame non si ha una dimensione compattificata ma una dimensione di lunghezza finita (di ordine L_p). Questa si comporta nè più nè meno come una corda di violino e quindi anche in questo caso abbiamo degli stati eccitati: le particelle corrispondenti sono dette particelle di Kaluza-Klein. Il calcolo della loro massa è più complicato perchè alle due estremità le scale di massa sono molto diverse.

Si può però dimostrare che tra gli stati di energia più bassa ce ne sono di massa dell'ordine del TeV/c^2 . Il motivo è che corrispondono a vibrazioni della corda in vicinanza della nostra brana. Ma particelle di questa massa possono essere prodotte facilmente a LHC, dove si accelerano due fasci di protoni l'uno contro l'altro. I quark costituenti i protoni si possono annichilare e produrre queste particelle di Kaluza-Klein che poi possono decadere in una coppia elettrone-positrone (l'antiparticella dell'elettrone). Dato che a LHC i protoni saranno accelerati ad energie dell'ordine della decina di TeV, un processo di questo tipo sarebbe sicuramente osservabile.

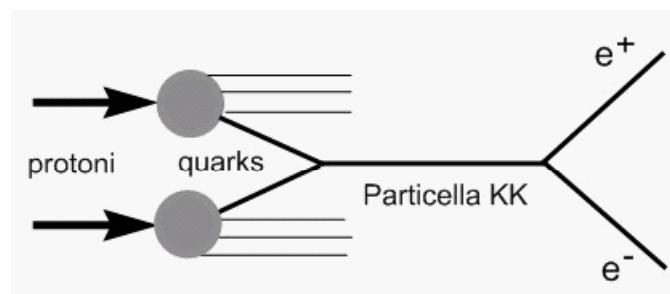


Figura 13 – L'urto di due protoni dà luogo all'annichilazione di due quark che producono una particella di Kaluza-Klein che decade in una coppia elettrone-positrone

9 Conclusioni

Per terminare questa discussione, vorrei citare un libro molto bello, scritto nel 1884 da un reverendo inglese, Edwin A. Abbott, intitolato *Flatland: A romance in many dimensions* [2]. Questo libro fornisce una descrizione accurata di un mondo bidimensionale con tutti i problemi che questo comporta per la sociologia degli abitanti. Questi hanno strutture geometriche di tipo poligonale ed un ovvio problema è che un abitante vede solo una proiezione unidimensionale degli altri. Il protagonista della storia, di tendenze eretiche (per quel paese), ipotizza che in realtà l'universo abbia più di due dimensioni, per quanto sia difficile per lui poterle immaginare. Però, un giorno riceve una visita da un abitante del mondo tridimensionale in cui Flatlandia è immersa (in altri termini Flatlandia è una 2-brana) che gli mostra come un oggetto intrinsecamente tridimensionale, quale una sfera, possa essere osservato in due dimensioni. Per esempio se la sfera passa attraverso il piano di Flatlandia, l'abitante bidimensionale vedrà prima un punto, poi un cerchio di dimensioni sempre più grandi; in seguito il cerchio comincerà a diminuire fino a ridursi ad un punto ed infine sparire. La sfera può essere ricostruita incollando insieme le sezioni trasversali che sono tutte porzioni di piano ma di dimensioni diverse. Questo è esattamente l'analogo della struttura a imbuto che abbiamo visto nel modello precedente. Sarà interessante seguire lo sviluppo futuro di queste teorie multidimensionali perchè, se ci saranno segnali in senso positivo da LHC, il nuovo secolo ci potrebbe offrire orizzonti fin qui sconosciuti.

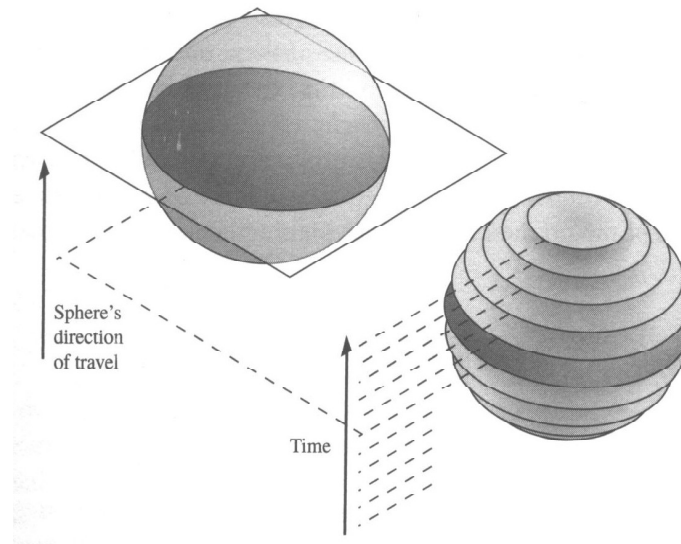


Figura 14 – La figura mostra il passaggio di una sfera attraverso un piano (lato sinistro) e la sua ricostruzione ottenuta incollando le varie sezioni. Le frecce indicano la direzione del moto della sfera attraverso la superficie ed i tempi ai quali sono ottenute le varie sezioni.

Bibliografia

- [1] L. Randall, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*, Harper Collins, Londra 2005.
- [2] E.A. Abbott, *Flatlandia – Racconto fantastico a più dimensioni*, Adelphi, Milano 1966.

Roberto Casalbuoni

Università di Firenze

Istituto Galileo Galilei per la Fisica Teorica e OpenLab - Firenze