



Logica e fisica

La meccanica quantistica, la teoria fisica che studia i *microoggetti* (elettroni, fotoni, quarks, ...) ha cambiato profondamente alcune nostre idee generali sulla interazione fra *ciò che esiste* e *ciò che potrebbe esistere*. La logica classica e la fisica classica avevano proposto una distinzione rigida fra gli *oggetti attuali* (o reali) e gli *oggetti possibili*. L'insieme degli oggetti attuali veniva descritto come un *sottoinsieme proprio* dell'insieme degli oggetti possibili; e fra questi due insiemi non erano ammessi contorni sfumati (*fuzzy*). Vedremo come la *logica quantistica*, una forma di logica non classica creata negli anni Trenta da Birkhoff e von Neumann, abbia cambiato questo modo di pensare.

Ogni ricerca logica sul *problema dell'esistenza* coinvolge naturalmente l'analisi semantica di un fondamentale operatore logico chiamato *quantificatore esistenziale* (indicato di solito con il simbolo \exists). Questo operatore si comporta in modo diverso in logiche diverse.

Per discutere adeguatamente problemi di questo tipo, è utile far riferimento a una forma molto flessibile di semantica, che è stata chiamata *semantica dei mondi possibili*. L'idea intuitiva di base è molto semplice e risale a Leibniz. Si suppone che il mondo attuale (o reale), che indicheremo con il simbolo W , sia correlato con un certo numero di situazioni alternative, chiamate anche mondi possibili. Naturalmente, il mondo attuale stesso rappresenta un esempio di mondo possibile. La correlazione fra mondi viene di solito chiamata relazione di accessibilità. Da un punto di vista intuitivo, un mondo W_1 è accessibile a un altro mondo W_2 , quando W_2 rappresenta una alternativa ragionevole per W_1 .

A prima vista, l'idea di mondo possibile può apparire fortemente metafisica. Ma, in realtà, la semantica dei mondi possibili ha dato luogo a molte applicazioni concrete: dalla linguistica, alla fisica, all'informatica.



L'applicazione logica forse più naturale della semantica dei mondi possibili è nata nel contesto delle logiche modali (che studiano il comportamento degli operatori logici di possibilità e di necessità). Consideriamo due tipici enunciati modali:

- È possibile A (che di solito viene scritto formalmente così: \Diamond);
- È necessario A (formalizzato così: \Box).

Come analizzare le condizioni di verità per enunciati di questo tipo? Un'analisi semantica naturale, che sfrutta l'idea di mondo possibile, è la seguente:

$\Diamond A$ è VERO nel mondo attuale W se e solo se esiste un mondo possibile $W1$ accessibile a W , tale che A è vero in $W1$.

$\Box A$ è VERO nel mondo attuale W se e solo se per ogni mondo possibile $W1$ accessibile a W , A è vero in $W1$.

Per esempio, l'enunciato *È necessario che tutti gli uomini siano mortali* è vero nel mondo attuale se e solo se l'enunciato *Tutti gli uomini sono mortali* è vero in tutte le situazioni alternative ragionevoli rispetto al mondo attuale. In altri termini, non ha senso pensare a un mondo alternativo in cui qualche umano goda della immortalità.

Diversamente da quello che succede nel caso degli operatori modali, l'analisi semantica che la logica classica ha proposto per il quantificatore esistenziale non fa alcun riferimento a mondi alternativi.

Consideriamo l'enunciato *Esiste qualche P* (per esempio: *Esiste qualcuno che prega*). Enunciati che hanno questa forma logica vengono di solito scritti formalmente così: $\exists xPx$. Secondo la semantica classica,

$\exists xPx$ è VERO nel mondo attuale W
se e solo se
 W contiene un individuo reale che soddisfa la proprietà P .

Non viene invocato alcun riferimento a mondi virtuali: si resta "disperatamente" vincolati al nostro mondo reale.

Nella logica quantistica si è invece molto più "liberali": in generale,



l'esistenza reale dipende essenzialmente da esistenze virtuali!

Infatti, l'analisi semantica che viene proposta per il quantificatore esistenziale logico-quantistico (\exists_q) è la seguente:

$\exists_q xPx$ è VERO nel mondo attuale W

se e solo se

per ogni mondo possibile W1 accessibile a W esiste un mondo W2

accessibile a W1 e un individuo (che vive in W2) il quale soddisfa la proprietà P nel mondo W2.

Una condizione come questa, che può apparire a prima vista alquanto strana, risulta naturalmente molto più debole della corrispondente condizione classica. Infatti, potrebbe capitare la situazione seguente: il mondo reale W non contiene individui che soddisfano la proprietà P. Tuttavia, per ogni mondo alternativo (al mondo reale) esiste un mondo alternativo (a quel mondo alternativo), dove un individuo soddisfa la proprietà P.

Malgrado la sua apparenza metafisica, la semantica dei mondi possibili dà luogo a una interpretazione fisica molto naturale. L'idea intuitiva di base è la seguente: ogni mondo possibile rappresenta la conoscenza di un osservatore intorno al sistema quantistico studiato (potrebbe trattarsi, per esempio, di un elettrone o di un fotone, o anche di un sistema composto costituito da molte particelle). In questo contesto, il mondo attuale corrisponde semplicemente alla conoscenza che l'osservatore ha intorno al sistema che sta studiando in quel momento. Mondi possibili alternativi rappresentano invece informazioni intorno a stati diversi che il sistema studiato potrebbe assumere. Nelle situazioni più felici, un mondo possibile corrisponde a una informazione non contraddittoria massimale. Si tratta di una forma di conoscenza che non può essere estesa in modo coerente (nell'ambito della teoria) a una conoscenza più ricca: anche una mente onnisciente non potrebbe sapere di più.

Informazioni di questo tipo, sono chiamate stati puri (sia in meccanica classica sia in meccanica quantistica). Nel formalismo della teoria quantistica, gli stati puri sono rappresentati matematicamente da vettori particolari (indicati spesso con i simboli φ , ψ) che "vivono" in uno spazio astratto speciale H, chiamato spazio di Hilbert.

Diversamente da quello che accade agli stati puri della meccanica classica,



gli stati puri quantistici sono logicamente incompleti. Infatti, uno stato puro ψ non decide semanticamente tutte le proprietà fisiche di cui può godere il sistema descritto da ψ . In virtù del principio di indeterminazione di Heisenberg, molte proprietà sono necessariamente indeterminate.

Qual'è il significato fisico che possiamo attribuire alla relazione di accessibilità? Dal punto di vista matematico, due stati puri ψ e φ sono accessibili quando non sono ortogonali nello spazio astratto H , dove “vivono” tutti gli stati puri. Ciò corrisponde alla seguente relazione fisica: ψ è accessibile a φ quando ψ può essere trasformato in φ dopo l'esecuzione di una misura che riguarda una grandezza fisica del sistema. La trasformazione di stato:

$$\psi \Rightarrow \varphi$$

che è indotta dalla misura viene anche chiamata collasso della funzione d'onda.

Per capire il significato fisico del quantificatore esistenziale logico-quantistico, è utile ricordare che, in molte logiche, il quantificatore esistenziale (\exists) rappresenta una generalizzazione della disgiunzione (\vee).

Possiamo illustrare la cosa con un esempio semplice, pensando di riferirci all'universo umano originario rappresentato dall'insieme che contiene solo due elementi: *Adamo* ed *Eva*. In questo universo l'enunciato esistenziale

Esiste qualcuno che ha mangiato la mela

è chiaramente equivalente all'enunciato disgiuntivo

O Adamo o Eva ha mangiato la mela.

Ma naturalmente, nella situazione umana attuale, usare enunciati disgiuntivi (con circa 6 miliardi di membri) al posto di enunciati esistenziali risulterebbe alquanto scomodo!

Anche nella logica quantistica, il quantificatore esistenziale \exists_q rappresenta una generalizzazione della disgiunzione logico-quantistica \vee_q . La condizione di verità per enunciati disgiuntivi è la seguente:

L'enunciato

$A \vee_q B$ è VERO nel mondo attuale W

se e solo se

per ogni mondo possibile $W1$ accessibile a W esiste un mondo possibile $W2$ accessibile a $W1$ tale che o A è vero in $W2$ o B è vero in $W2$.

Ne viene che, una disgiunzione può essere vera (nel mondo attuale)



anche quando entrambi i membri sono indeterminati. Un comportamento semantico come questo, che a prima vista può apparire strano, riflette in realtà molto fedelmente varie situazioni quantistiche concrete. Infatti nella teoria quantistica accade spesso di avere a che fare con alternative che sono semanticamente determinate, mentre entrambi i membri dell'alternativa sono in linea di principio essenzialmente indeterminati.

In realtà, questa caratteristica semantica della logica quantistica era stata presa in considerazione già da Aristotele. Si deve al logico polacco Lukasiewicz la scoperta che Aristotele fu il primo logico polivalente, che accettò la possibilità di un terzo valore di verità (indeterminato) oltre ai valori vero e falso. Seguendo questa linea di pensiero, si potrebbe ragionevolmente affermare che Aristotele fu anche il primo logico quantistico. Facciamo riferimento all'analisi di Lukasiewicz del capitolo IX del *De Interpretatione* di Aristotele. Si tratta del famoso esempio aristotelico della battaglia navale. Secondo l'interpretazione di Lukasiewicz, Aristotele sembra asserire che entrambi gli enunciati

Domani ci sarà una battaglia navale,

e la sua negazione

Domani non ci sarà una battaglia navale

hanno oggi valore di verità indeterminato. Tuttavia, la disgiunzione

Domani ci sarà una battaglia navale

o

domani non ci sarà una battaglia navale

è vera oggi (e sempre).

In altri termini, Aristotele sembra consapevole della necessità di distinguere la legge logica del terzo escluso (secondo cui ogni proposizione che abbia la forma A o non A è vera) dal principio semantico di bivalenza (secondo cui ogni proposizione deve essere vera oppure falsa). Si ottiene così una situazione semantica tipicamente logico-quantistica: le verità di una disgiunzione non implica, in generale, la verità di almeno un membro della disgiunzione stessa.

Uno degli esperimenti *fondamentali della meccanica quantistica*, l'esperimento delle due fenditure, è stato spesso descritto come una sorta di *experimentum crucis* per la logica quantistica. Si tratta di un risultato intrigante



che R. Feynman (nelle sue celebri *Lezioni di Fisica*) ha commentato così: E' tutto molto misterioso. E più guardiamo a questo esperimento più misterioso ci appare.

Per capire da un punto di vista intuitivo perchè l'esperimento delle due fenditure appare così "misterioso", seguiremo una descrizione divertente che si trova nel libro Alice nel *Paese dei Quanti. Una Allegoria della Fisica Quantistica* di R. Gilmore. L'Alice di Gilmore (moderna variante di Alice nel paese delle meraviglie) fa un viaggio fantastico attraverso i misteri del mondo dei quanti. A un certo punto giunge alla Sala Gedanken, dove tutti gli esperimenti di pensiero diventano reali. Prima di tutto il Meccanico Classico illustra l'esperimento delle due fenditure usando una mitragliatrice, che comincia a sparare un certo numero di proiettili. Mentre la maggior parte dei proiettili si disperde in varie direzioni, alcuni attraversano una parete (posta di fronte alla mitragliatrice) su cui si trovano due fori (il foro 1 e il foro 2) colpendo in uno schermo (di fronte alla parete), dove lasciano ciascuno una traccia precisa. La configurazione finale di tutte le tracce sullo schermo dà luogo a una tipica figura a campana (chiamata anche figura addittiva). Si può dire che la figura rappresenta la probabilità che un proiettile generico raggiunga le diverse regioni dello schermo. Il Meccanico Classico spiega così l'esperimento ad Alice:

“Poichè entrambi i fori sono aperti, i proiettili possono passare attraverso l'uno o l'altro dei due fori. Ne viene che la distribuzione di probabilità globale è data dalla somma delle probabilità che abbiamo per ciascuno dei due fori presi singolarmente. Infatti, i proiettili che arrivano sullo schermo devono essere passati attraverso uno o l'altro dei due fori; ma non possono essere passati attraverso entrambi!”

Subito dopo, il Meccanico Quantistico fa un esperimento simile, usando un cannone elettronico. L'effetto che si ottiene è completamente diverso: sullo schermo appare una chiara figura di interferenza, del tutto simile a quella che si avrebbe nel caso di un fenomeno di tipo ondulatorio. Il Meccanico Quantistico spiega:

“Ecco vedete un chiaro effetto di interferenza. Se avessimo tenuto aperto un solo foro, avreste potuto vedere che la distribuzione sarebbe andata calando



in modo continuo e tranquillo da entrambi i lati proprio come nel caso dei proiettili. In questo caso vediamo invece che quando sono aperti tutti e due i fori, c'è un fenomeno di interferenza. Il comportamento degli elettroni è molto diverso da quello dei proiettili del mio amico, il Meccanico Classico! Non capisco - dice Alice - Vuol dire che ci sono così tanti elettroni che riescono a passare che in qualche modo gli elettroni che passano da uno dei due fori interferiscono con quelli che passano dall'altro?"

No. Assolutamente no - risponde il Meccanico Quantistico

L'effetto di interferenza si verifica anche quando c'è un solo elettrone presente in ogni istante. Un elettrone da solo può esibire l'interferenza. Può passare attraverso tutte e due le fenditure e interferire con se stesso, se così si può dire. "Ma questa è una sciocchezza! - esclama Alice - Un elettrone non può passare attraverso entrambe le fenditure. Non è una cosa sensata. Come ha detto il Meccanico Classico."

Subito dirige la luce verso le due fenditure:

"Ce l'ho fatta! Riesco a vedere gli elettroni che passano attraverso le fenditure, ed è proprio come dicevo io: ciascuno di essi passa da una parte o dall'altra. "Ah, ma davvero?" - ribatte il Meccanico Quantistico - Ma hai provato a guardare se sullo schermo c'è sempre la figura di interferenza? Gli effetti di interferenza si verificano solo quando non c'è modo di poter sapere attraverso quale fenditura passi l'elettrone. Che tu poi lo sappia o no, non ha alcuna importanza. Così, come vedi, quando c'è interferenza sembrerebbe che ciascun elettrone passi per entrambe le fenditure. Se fai la prova e controlli, scoprirai che gli elettroni passano attraverso una fenditura sola, ma allora ciao interferenza! Non puoi vincere a questo gioco!"

Il caso della figura di interferenza che si verifica quando non è possibile osservare, dà luogo a un comportamento tipicamente logico-quantistico: la verità di una disgiunzione non implica in generale la verità di uno dei due membri della disgiunzione stessa.

La disgiunzione:

l' elettrone è passato attraverso il foro 1



o

l'elettrone è passato attraverso il foro 2

è determinata e vera. Tuttavia, entrambi i membri della disgiunzione sono indeterminati e dunque non veri.

Quando invece osservare è possibile (anche se nessun osservatore reale sta osservando), la figura di interferenza sparisce e il connettivo *o* si comporta secondo la logica classica. La verità della disgiunzione

l'elettrone è passato attraverso il foro 1

o

l'elettrone è passato attraverso il foro 2

implica che ciascun elettrone sia passato attraverso un foro determinato. Anche i computer quantistici danno luogo a situazioni molto simili a quelle che accadono nel caso dell'esperimento delle due fenditure. Infatti, il forte parallelismo, che è caratteristico dei computer quantistici (e rappresenta la ragione principale della loro efficienza e velocità), è fondato essenzialmente su percorsi virtuali, che un computer quantistico può seguire tutti allo stesso tempo.

Le strane interazioni quantistiche fra reale e virtuale sembrano dunque portare anche a conseguenze tecnologiche interessanti.

Maria Luisa Dalla Chiara

Bibliografia

(1) R. Gilmore, *Alice nel Paese de Quanti. Una Allegoria della Fisica Quantistica*,

Cortina, Milano, 1996.

(2) M. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia, *Introduzione alla Filosofia della Scienza*,

Laterza, Bari, 1999.