

MATEMATICA VS ARMAGEDDON: COME PREVEDERE L'IMPREVEDIBILE¹

GIACOMO TOMMEI

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Introduzione

A cosa serve la *Matematica*? Se le sono chiesto in tanti (...e molti altri continueranno a farlo), la risposta è complessa, però se volessimo provare a spiegarlo in poche righe non possiamo non citare il protagonista della serie tv *Numb3rs*, il geniale matematico Charlie Epps, per il quale “Ogni cosa è numero”. La Matematica è ovunque ed è necessaria in molti campi e in diversi aspetti della nostra vita. Non voglio qui fare un elenco (che risulterebbe sicuramente incompleto), il mio scopo è raccontare come la Matematica sia utile in un contesto particolare, la protezione del nostro pianeta da pericoli provenienti dallo spazio (non pensate subito ad un’invasione aliena...). Detto in altri termini, la Matematica ci può aiutare a non fare la fine dei *dinosauri*. Questi rettili giganteschi hanno dominato la Terra da 230 a 65 milioni di anni fa, quando improvvisamente si sono estinti.

L’ipotesi più accreditata per la causa dell’estinzione (*ipotesi di Alvarez*, 1980) è quella di un impatto asteroidale o cometario che ha fortemente alterato l’ecosistema in cui vivevano i dinosauri. Nel 1990 è stato identificato il cratere di *Chicxulub*, sulla costa dello Yucatan, in Messico, che ha i requisiti per soddisfare l’ipotesi di Alvarez: questo cratere ha un diametro stimato di circa 180 chilometri, e il suo ritrovamento è stato possibile solo grazie a tecniche moderne in quanto è interamente sommerso dal mare.

Gli asteroidi da tenere sotto controllo non sono però solo quelli che portano ad un’estinzione di massa, ce ne sono molti altri, più piccoli, che possono creare danni considerevoli. Nell’estate del 1908 un oggetto, probabilmente un asteroide roccioso con un diametro stimato tra i 60 e i 190 m, esplose ad un’altitudine tra i 6 e i 10 Km vicino a *Tunguska*, in Siberia. Nell’esplosione furono rilasciati circa 15 Megatons di energia bruciando svariati ettari di tundra siberiana. Il 15 Febbraio 2013 a *Chelyabinsk*, in Russia, un oggetto di natura asteroidale (di circa 18 m di diametro) è esploso nei cieli a 23 Km di altezza provocando più di 1000 feriti e molti milioni di euro di danni (su YouTube si trovano diversi filmati). Pensate se un simile oggetto (o, peggio, un oggetto di tipo Tunguska) invece di esplodere e frantumarsi finendo la sua corsa in un lago

¹ Lezione tenuta martedì 26 novembre 2013, ore 11 - Istituto C. Lorenzini, Via Sismondi n. 7, Pescia (PT); mercoledì 15 gennaio 2014, ore 11 - ISIS Sismondi, Via Aldo Moro n. 11, Pescia (PT)

ghiacciato, avesse impattato su una città o su una zona popolosa, oppure in mare creando forti tsunami. È questo il motivo che spinge gli scienziati a tenere sotto controllo gli incontri ravvicinati di asteroidi.

Naturalmente non si deve creare allarmismo, le frequenze degli impatti e le loro conseguenze in termini di energia rilasciata sono visibili nella Figura sottostante.

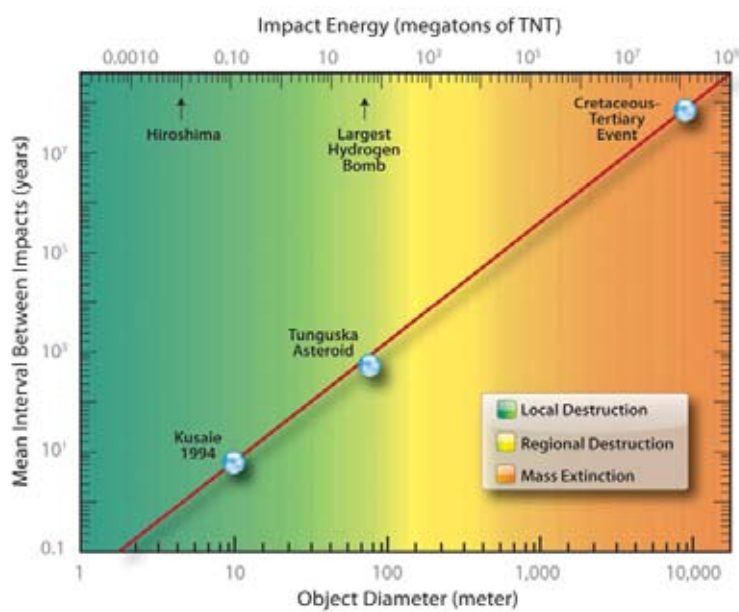


Figura 1

Come si può notare un evento tipo Tunguska si verifica in media ogni 100 anni, mentre un evento catastrofico come quello che ha portato all'estinzione dei dinosauri ogni 100 milioni di anni. Quindi, da una parte la statistica ci può far stare tranquilli, ma dall'altra la comunità scientifica non può ignorare il problema, che, come vedremo nei successivi paragrafi, non è così semplice da risolvere.

2. I nostri vicini scomodi

La parola *asteroide* significa “come una stella”, anche se questi corpi minori del Sistema Solare non emettono luce propria, ma sono visibili solo perché riflettono la luce solare. Le dimensioni degli asteroidi variano notevolmente: si va dalle centinaia di chilometri in diametro (*Cerere*, il più grande ed il primo ad essere scoperto, misura 913 Km in diametro) ai pochi metri. La massa totale di tutti gli asteroidi è inferiore a quella della Luna.

Vi sono asteroidi in diverse posizioni del Sistema Solare e se ne conoscono più di 500000. La maggioranza di essi orbita nella fascia principale (detta anche cintura principale, *Main Belt*) tra Marte e Giove. I pianetini che maggiormente ci interessano, però, sono quelli che arrivano in un intorno della Terra e sperimentano incontri ravvicinati con il nostro pianeta: tali asteroidi sono chiamati NEAs (*Near Earth Asteroids*) e hanno la proprietà di avere una distanza minima dal Sole (*perielio*) inferiore a 1.3 Unità

Astronomiche (le orbite di questi oggetti sono ellissi con il Sole in uno dei fuochi secondo la prima legge di *Keplero*). Fu con la scoperta di 433 Eros (1898) che si accertò l'esistenza di tali asteroidi e al momento (fine Luglio 2014) se ne contano 11130.

L'attenzione per questi oggetti aumentò notevolmente con l'avvento dell'era spaziale e, in particolare, con le missioni lunari. Queste missioni misero in luce la natura da impatto dei crateri sulla Luna costringendo la comunità scientifica a porsi il problema degli impatti sulla Terra. Il monitoraggio di impatti (*impact monitoring*) è quindi una "scienza" giovane, basti pensare che nel 1998, anno in cui uscirono ben due film americani sul tema ("Armageddon" e "Deep Impact"), ancora non esistevano algoritmi per il calcolo della probabilità d'impatto.

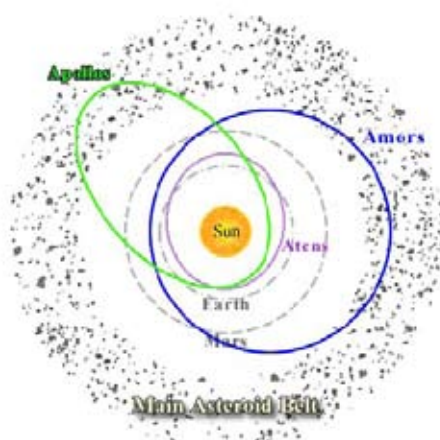


Figura 2

3. Ci serve la matematica!

Capire se un asteroide può in un futuro (prossimo o lontano) impattare con il nostro pianeta è un problema difficile che può essere suddiviso in tre passi.

1. Guardare il cielo e scoprire gli oggetti. Più osservazioni si hanno (purché siano di qualità), maggiore è l'accuratezza con la quale si può conoscere l'orbita dell'oggetto.
2. Calcolare, a partire dalle osservazioni, le orbite degli oggetti scoperti (*determinazione orbitale*).
3. Capire, con le informazioni a disposizione (osservazioni e orbite), se in futuro gli oggetti potranno impattare con il nostro pianeta, calcolando una probabilità d'impatto (*impact monitoring*).

Il passo 1) è compito degli astronomi di tutto il mondo, mentre per i passi 2) e 3) la Matematica è essenziale.

La determinazione dell'orbita di un corpo celeste è un processo costituito da due fasi: (1) costruzione di un'*orbita preliminare* a partire da un numero minimo di osser-

vazioni; (2) perfezionamento dell'orbita con metodi correttivi grazie ad un numero più consistente di osservazioni (ottenendo una soluzione nominale). Tradizionalmente esistono due metodi per il calcolo di orbite preliminari, il metodo di *Laplace* (matematico, fisico e astronomo francese, 1749-1827) ed il metodo di *Gauss* (matematico, fisico e astronomo tedesco, 1777-1855). In entrambi i metodi si cerca di determinare un'orbita *kepleriana* determinata dall'attrazione gravitazionale agente tra il corpo e il Sole. La base di partenza è data da tre osservazioni, ognuna delle quali è costituita da una terna (t, α, δ) in cui t rappresenta l'istante dell'osservazione, α l'ascensione retta e δ la declinazione del corpo (due angoli che servono a individuare l'oggetto sulla sfera celeste, come un punto sulla superficie terrestre è individuato da longitudine e latitudine). Ciò che non conosciamo è la distanza dell'oggetto, ed è proprio tale quantità che deve essere calcolata. Si tratterà, nella risoluzione del problema, di trovare le radici di un polinomio di ottavo grado (peraltro tale polinomio risulterà simile in entrambi i metodi), e scoprire quali di queste possono essere accettate e quali invece devono essere scartate. Dovremo tener conto del fatto che le osservazioni iniziali contengono un *errore di misura* in nessun modo eliminabile; inoltre sarà necessario procedere ad ulteriori approssimazioni, utilizzando *metodi numerici* dei quali non è sempre assicurata la convergenza. La soluzione del problema non è quindi di per sé garantita (anzi ci sono casi in cui è impossibile trovarla). Nonostante questo, i metodi in questione sono ancora molto attuali e permettono spesso di risolvere il problema della costruzione di un'orbita preliminare. Naturalmente esistono oggi altri metodi per il calcolo di un'orbita preliminare, alcuni dei quali sviluppati dal Gruppo di Meccanica Celeste dell'Università di Pisa pochi anni fa. Con l'aggiunta di nuove osservazioni l'orbita preliminare può essere migliorata con il *metodo dei minimi quadrati*, inventato da Gauss, che permise di ritrovare l'asteroide Cerere (scoperto da *Giuseppe Piazzi* il primo giorno dell'anno 1801) un anno circa dopo la scoperta.

Ogni volta che calcoliamo un'orbita dobbiamo tener conto della sua incertezza, dovuta alla propagazione degli errori di misura negli algoritmi. Quindi se vogliamo scoprire possibili impatti di un certo oggetto nel futuro dobbiamo, non solo propagare la sua orbita nominale, ma anche l'incertezza associata. Ed è qui che il problema si complica a causa della natura caotica delle orbite.

4. Breve storia del caos

Un sistema caotico ha le seguenti caratteristiche:

- a. l'evoluzione su tempi lunghi è imprevedibile e simula un processo stocastico, ovvero una variazione casuale del sistema;
- b. due sistemi con condizioni molto vicine possono avere un futuro radicalmente diverso;
- c. le orbite degli elementi che compongono il sistema restano generalmente confinate, ovvero il sistema non evolve verso l'infinito.

Contrariamente a quanto si tenda a pensare comunemente dire che un sistema è caotico non vuole dire che sia instabile, ma piuttosto che sia imprevedibile: la nostra conoscenza della sua evoluzione ha un orizzonte temporale limitato che dipende dal sistema in considerazione. La Teoria del Caos è una disciplina relativamente giovane che, nella seconda metà del Novecento ha fatto breccia nell'immaginario collettivo anche grazie a numerosi romanzi e film. È famoso il personaggio di Ian Malcolm, il matematico del libro (e dell'omonimo film, interpretato magistralmente da Jeff Goldblum) "Jurassic Park", il quale illustra il caos parlando del famoso effetto farfalla, enunciato per la prima volta dal matematico statunitense *Edward Norton Lorenz* (1917 – 2008): una farfalla sbatte le ali a Pechino e a Central Park piove. Lorenz fu colui che riscoprì il caos negli anni Sessanta del secolo scorso, ma il primo a riscontrare fenomeni caotici fu un brillante matematico francese *Henri Poincaré* (1854 – 1912). Nel 1885 il re Oscar II di Svezia, per celebrare il suo sessantesimo compleanno, decise di offrire un premio di 2500 corone a chiunque fosse stato in grado di descrivere matematicamente il moto di un certo numero di corpi soggetti alla forza di attrazione gravitazionale, quella descritta da Newton un paio di secoli prima. L'intento era chiaro: sfruttare la potenza della Matematica per predire il futuro, ma soprattutto la stabilità del Sistema Solare. Il problema, noto oggi come *problema degli N-corpi gravitazionale*, è difficilissimo perché appartiene a quella classe di problemi matematici detti non integrabili, ovvero la soluzione non può essere espressa mediante un algoritmo che include quadrature (calcolo di integrali) e funzioni implicite. Nonostante il problema fosse così difficile, il premio fu assegnato a Poincaré che studiò il moto di tre corpi, dimostrando che la soluzione non è esprimibile in forma esplicita. Nel lavoro che gli valse il premio enunciò inoltre un risultato di stabilità sul moto di questi tre corpi, a cui era arrivato arrotondando differenze molto piccole nelle posizioni dei corpi, pensando che ciò non avrebbe influito sul risultato finale. Solo dopo la consegna del lavoro, si accorse di aver commesso un grave errore: a differenza di quanto aveva creduto inizialmente, un piccolo cambiamento nelle condizioni iniziali portava ad orbite completamente diverse. Si affrettò quindi a contattare l'editore per far cessare la stampa del suo lavoro e si prodigò per recuperare e distruggere tutte le copie già stampate. Si vocifera che dovette ricomprarne una buona quantità spendendo più delle 2500 corone del premio. Ma dopo l'errore, cosa sarebbe successo al premio? Sembrava che stesse per scoppiare uno scandalo e invece, come spesso succede quando si fa ricerca, un errore clamoroso aveva spianato la strada ad un risultato sensazionale: Poincaré aveva scoperto il caos. I tempi, però, non erano maturi per quella scoperta. Con l'inizio del Novecento le attenzioni della comunità scientifica (e quindi anche di Poincaré) si spostarono verso nuove teorie fisiche, la teoria della relatività (ristretta e generale) di *Albert Einstein* (1879-1955) e la meccanica quantistica di *Max Planck* (1858-1947), che avrebbero influenzato tutto il secolo. Toccò allora a Lorenz riscoprire il caos durante alcune simulazioni di moti turbolenti nell'atmosfera. Si cominciarono ad usare elaboratori elettronici i quali lavorano in aritmetica finita, troncando i valori numerici durante i calcoli. Lorenz si accorse che, trascurando le cifre

troncate dall'elaboratore nelle condizioni iniziali utilizzate per una nuova propagazione, si arrivava a risultati drasticamente diversi: i moti erano imprevedibili.

I fenomeni caotici nel Sistema Solare sono ben visibili, l'intero Sistema Solare può considerarsi caotico su tempi scala lunghi, non si possono infatti fare previsioni attendibili oltre i 100 milioni di anni. Ci sono inoltre dei meccanismi che amplificano il caos e che sono particolarmente importanti per capire la dinamica e l'origine degli asteroidi potenzialmente pericolosi.

a) *Collisioni*. Le collisioni tra i numerosi asteroidi che abitano nella fascia principale rappresentano un evento consueto, le cui conseguenze dipendono dalle condizioni e dalle caratteristiche dei corpi. I principali fenomeni che possono verificarsi in questo caso sono due: l'accrescimento e la frammentazione. La prima ha luogo quando due corpi collidono a una velocità relativa sufficientemente scarsa e porta alla fusione dei due corpi. La frammentazione avviene invece a velocità relative maggiori, o se la composizione chimica dei due corpi è più fragile. In questo caso, i corpi si frammentano dando vita a diversi frammenti più piccoli. Il destino dei frammenti prodotti da una collisione può essere diverso: possono diventare singoli asteroidi oppure dar luogo a una delle tante famiglie dinamiche di asteroidi.

b) *Incontri ravvicinati*. Il Sole, con la sua grande massa, costituisce l'attrattore principale di tutti i corpi del Sistema Solare; per questo le orbite possono essere calcolate, in prima approssimazione, applicando le *leggi di Keplero* per il moto a due corpi. La principale eccezione a questa legge si ha quando il corpo passa vicino ad un pianeta. In questo caso c'è una zona dove l'attrazione esercitata dal pianeta è più forte di quella degli altri corpi, incluso il Sole. Questa zona si chiama *sfera di influenza* del pianeta e al suo interno l'orbita originale del corpo cambia drasticamente diventando indipendente da quella originaria, anche se molto sensibile alle condizioni iniziali, cioè allo stato di moto prima dell'entrata nella sfera d'influenza. Per questa ragione gli incontri ravvicinati sono visti come amplificatori del caos.

c) *Risonanze*. La *risonanza* è un fenomeno efficiente nel rendere caotiche le orbite su tempi scala molto lunghi. Ma che cos'è una risonanza? Consideriamo un asteroide con un'orbita che incrocia quella di Giove. Come è noto, l'attrazione newtoniana tra due corpi, è inversamente proporzionale alla loro distanza, per cui quando i due corpi sono vicini, l'asteroide subisce la massima attrazione da parte del pianeta. Se i periodi di Giove e dell'asteroide non sono proporzionali, i due corpi si ritroveranno saltuariamente vicini e l'effetto generale della reciproca attrazione sarà nullo. Invece l'interazione tra Giove e l'asteroide torna ad avere importanza quando le orbite dei due corpi hanno dei periodi risonanti. In altre parole, quando il periodo dell'asteroide è una frazione di quello di Giove, i due si trovano vicini periodicamente e la perturbazione si amplifica rendendo l'orbita dell'asteroide instabile.

d) *Effetto Yarkovsky*. *Yarkovsky* era un ingegnere russo che aveva proposto, più di un secolo fa, una teoria sui cambiamenti delle orbite dei corpi vaganti nello spazio interplanetario, innescati dalle variazioni di temperatura superficiale fra l'emisfero diurno e

quello notturno. Dato che un corpo solido tanto più è caldo tanto più emette radiazione infrarossa, e questa emissione produce una piccola forza di rinculo (un po' come i gas emessi dall'ugello di un razzo), Yarkovsky propose che un piccolo corpo roccioso orbitante e rotante sul proprio asse avrebbe avuto la sua orbita lentamente modificata a causa del riscaldamento asimmetrico della superficie prodotto dalla radiazione solare. Yarkovsky e il suo effetto furono quasi dimenticati fino a tempi recenti, quando calcoli accurati, basati sulle proprietà termiche delle meteoriti e delle rocce lunari hanno mostrato che, per gli asteroidi di diametro fino a 20 km, l'effetto Yarkovsky altera lentamente, ma in misura non trascurabile i semiassi maggiori delle orbite. In una predizione d'impatto con orizzonte lontano nel futuro è necessario includere tale effetto nel modello.

5. Impact monitoring

Quando un asteroide viene scoperto, come abbiamo già evidenziato, non si sa niente circa l'orbita reale dell'oggetto. Vi è un insieme di possibili orbite, tutte compatibili con le osservazioni, che formano una regione di confidenza nello spazio delle orbite (tale spazio ha dimensione 6, servono infatti sei numeri per individuare univocamente posizione e velocità dell'oggetto). Possiamo descrivere questo fatto pensando ad uno sciame di asteroidi virtuali (VAs, *Virtual Asteroids*), con orbite diverse, ma molto vicine, e tutte compatibili con le osservazioni. La verità dell'asteroide è divisa tra tutti quelli virtuali, nel senso che solo uno è reale, ma non si sa quale. Per rendere le cose semplici è possibile pensare che tutti gli asteroidi virtuali abbiano la stessa probabilità di essere quello reale, ma in realtà si utilizza una distribuzione di probabilità più complicata (*Gaussiana*).

Poiché la regione di confidenza contiene un continuo di orbite, ogni asteroide virtuale è il rappresentante di una piccola porzione di spazio. C'è da notare che l'orbita nominale, soluzione del fit ai minimi quadrati dei residui osservativi, è solo uno dei tanti asteroidi virtuali, senza nessun altro specifico significato. Nel caso che un asteroide sia Earth-crossing, è possibile che esistano uno, o più asteroidi virtuali associati ad esso, per i quali è ammissibile una collisione. Quindi può esistere una piccola regione connessa piena di orbite collisionali, la quale definisce un impattore virtuale (VI, *Virtual Impactor*). Lo scopo dell'impact monitoring è individuare impattori virtuali ed assegnare a ciascuno una probabilità d'impatto. Per raggiungere lo scopo dobbiamo prendere ciascun asteroide virtuale e propagare la sua orbita nel futuro (di solito 100 anni) registrando eventuali incontri ravvicinati e impatti con il nostro pianeta. Per la propagazione dobbiamo naturalmente campionare con un numero finito di VAs la regione di confidenza. Questo viene fatto utilizzando un sottospazio unidimensionale dello spazio degli elementi orbitali (una curva) che chiamiamo Linea Delle Variazioni (LOV, *Line Of Variations*). Su questa curva vengono presi un certo numero di punti che rappresentano l'insieme dei VAs da propagare. Per la ricerca di impattori è necessario poi utilizzare un *piano bersaglio*, un piano passante per il centro della Terra e perpendicolare alla velocità relativa imperturbata dell'asteroide, sul quale viene segnata

la sezione della Terra e l'intersezione con le orbite dei VAs. Se un asteroide virtuale si trova dentro la sezione della Terra siamo in presenza di un impattore virtuale e possiamo procedere al calcolo della probabilità utilizzando una proiezione della regione di confidenza 6-dimensionale sul piano bersaglio che rappresenta l'incertezza associata all'impattore virtuale. Gli algoritmi qui descritti sono implementati in un software chiamato CLOMON2 (la prima versione CLOMON risale al 1998), creato dal Gruppo di Meccanica Celeste dell'Università di Pisa, che dal 2002 si occupa di calcolare orbite e probabilità d'impatto degli asteroidi potenzialmente pericolosi: gli output sono riassunti in una Risk Page pubblicata sul sito web NEODyS. Un sistema analogo, Sentinel, si trova al Jet Propulsion Laboratory (JPL) di Pasadena, California. I due gruppi di ricerca (UniPI e JPL) sono in continuo contatto per la verifica ed il confronto dei risultati.

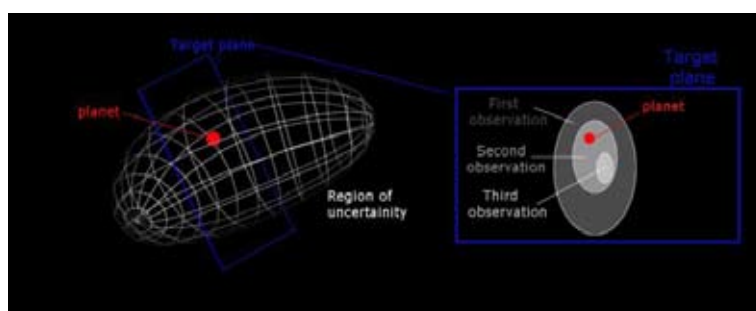


Figura 3

Se dovesse capitare di trovare una probabilità d'impatto uguale a 1, che cosa si fa? I fattori da prendere in considerazione sono essenzialmente due: dimensioni dell'oggetto e tempo rimanente all'impatto.

È chiaro che, maggiore è il tempo all'impatto, più possibilità si hanno di trovare una soluzione, che potrebbe anche consistere nell'organizzare una missione spaziale per la deflessione dell'asteroide. Se l'impatto è imminente (pochi giorni o addirittura poche ore) possiamo fare poco, ma gli oggetti in questi casi sono piccoli e spesso si sgretolano all'ingresso in atmosfera. Ad ogni modo il "cosa fare in caso di previsione di impatto" è un argomento molto complesso e ancora estremamente dibattuto sia a livello scientifico che politico.

6. Bibliografia e spunti di ricerca

Non ho di proposito inserito nei paragrafi precedenti riferimenti bibliografici, ma ho preferito evidenziare con il corsivo alcune parole chiave che possono essere ricercate sul web per ottenere maggiori informazioni (su Wikipedia, ma non solo).

Mi sento però di consigliare a tutti la lettura del seguente libro divulgativo

"Pianeti per caso" di Alessandra Celletti e Ettore Perozzi, UTET 2012

dove vengono trattati in maniera piacevole, ma rigorosa molti aspetti di meccanica celeste e astrodinamica.

Inoltre, se volete avere informazioni sulle orbite dei NEAs e su possibili impatti andate a visitare il sito NEODyS

<http://newton.dm.unipi.it/neodys/>